Pierwsze zadanie z pierwszego kolokwium AM I.1

26 listopada 2021

Mamy ciąg zadany rekurencyjnie: $a_1 > 0$ i $a_{n+1} = \frac{4}{27} + \frac{a_n}{9}$. Dostrzegamy bez trudu (formalny dowód przez indukcję), że $a_n > \frac{4}{27}$ dla $n \geq 2$.
Aby przyjąć sensowną strategię zastanówmy się, do jakiej liczby nasz ciąg mógłby być zbieżny. Zakładając, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ otrzymujemy

$$g = \frac{4}{27} + \frac{g}{9}, \text{ czyli } \frac{8}{9}g = \frac{4}{27},$$

a zatem $g = \frac{1}{6}$.
Zbadajmy teraz monotoniczność naszego ciągu:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{4}{27} + \frac{a_n}{9}\right) - \left(\frac{4}{27} + \frac{a_{n-1}}{9}\right) = \frac{a_n - a_{n-1}}{9}. \tag{1}$$

Wyliczmy $a_2 = \frac{4}{27} + \frac{a_1}{9}$. Wobec tego $a_2 \leq a_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{4}{27} \leq \frac{8}{9}a_1$, czyli $a_1 \geq \frac{1}{6}$. Zatem z nierówności (1) otrzymujemy następujące wnioski:

1. Jeśli $a_1 \leq \frac{1}{6}$, to ciąg jest niemalejący.
2. Jeśli $a_1 \geq \frac{1}{6}$, to ciąg jest nierosnący.

W drugim przypadku zbieżność ciągu jest udowodniona, bo jak wspomnieliśmy na początku $a_n > \frac{4}{27}$ dla $n \geq 2$, więc możemy skorzystać z dobrze znanej reguły: ciąg nierosnący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
W pierwszym przypadku uzasadnimy przez indukcję nierówność $a_n \leq \frac{1}{6}$ dla $n \geq 1$. Dla $n = 1$ (z założenia) i przyjmując, że $a_n \leq \frac{1}{6}$ uzyskujemy łatwo

$$a_{n+1} = \frac{4}{27} + \frac{a_n}{9} \leq \frac{4}{27} + \frac{1}{54} = \frac{1}{6}.$$

Zakończyliśmy tym samym dowód zbieżności naszego ciągu (tym razem mamy ciąg niemalejący i ograniczony z góry).

Uwaga 1. *Dowód zbieżności ciągu (a_n) można zakończyć na nierówności (1) powołując się na dowodzony w niektórych grupach ćwiczeniowych fakt:*

$$\underset{\lambda\in(0,1)}{\exists} \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_{n+1} - a_n| \leq \lambda|a_n - a_{n-1}| \Rightarrow \text{ \textit{ciąg jest zbieżny.}}$$

Można było też nie schodzić "poziom niżej"tylko napisać

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{27} - \frac{8}{9}a_n$$

i w połączeniu z dowodem indukcyjnym faktów $a_n \leq \frac{1}{6}$, jeśli $a_1 \leq \frac{1}{6}$ oraz $a_n \geq \frac{1}{6}$, gdy $a_1 \geq \frac{1}{6}$ zakończyć rozumowanie.

Zajmijmy się teraz zbieżnością ciągu b_n:

$$b_n = \frac{e^{a_n} - e^{\frac{1}{6}}}{6a_n - 1} = \frac{e^{\frac{1}{6}}\left(e^{a_n - \frac{1}{6}} - 1\right)}{6(a_n - \frac{1}{6})}.$$

Podstawiając $c_n = a_n - \frac{1}{6}$ dostrzegamy nasze ulubione wyrażenie $\frac{e^{c_n}-1}{c_n}$, gdzie $c_n \to 0$ przy $n \to \infty$, co przy przejściu granicznym da nam wartość 1 i ostatecznie $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{e^{\frac{1}{6}}}{6}$.

Kryteria oceny:

1. Dowód zbieżności ciągu (a_n): 5 punktów.
   (a) Uzasadnienie ograniczoności ciągu (a_n): 2 punkty.
   (b) Uzasadnienie monotoniczności ciągu (a_n): 2 punkty.
   (c) Powołanie się na twierdzenie o ciągach monotonicznych i zakończenie dowodu zbieżności ciągu (a_n): 1 punkt.
2. Wyliczenie granicy ciągu (a_n): 1 punkt.
3. Wyliczenie granicy ciągu (b_n): 2 punkty.

Rozbicie punktu 1. na trzy części obowiązuje, gdy rozwiązanie było prowadzone w oparciu o monotoniczność ciągu. Przy innym podejściu ewentualne błędy będą oceniane indywidualnie.