Zadanie 5

Rozwiązanie.

Sposób 1. Rozważmy ciąg $b_n = \ln(\sqrt[n^2]{a_n}) = \frac{\ln a_n}{n^2}$. Korzystając z twierdzenia Stolza-Cesaro (n^2 jest rosnący i rozbieżny do $+\infty$) dostajemy, że granica tego ciągu jest równa granicy ciągu $c_n = \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{2n+1}$, jeśli granica ciągu (c_n) istnieje. Korzystając drugi raz z twierdzenia Stolza-Cesaro dostajemy, że granica ciągu (c_n) jest równa granicy ciągu $d_n = \frac{1}{2}(\ln(a_{n+2} + \ln(a_n) - 2\ln(a_{n+1})))$. Zauważmy, że skoro $\frac{a_{n+2}a_n}{a_{n+1}^2} \to 4$, to z ciągłości logarytmu $\ln(\frac{a_{n+2}a_n}{a_{n+1}^2}) = \ln(a_{n+2} + \ln(a_n) - 2\ln(a_{n+1}) \to \ln 4 = 2\ln 2$. Stąd $d_n \to \ln 2$. Stąd $b_n \to \ln 2$, czyli z ciągłości eksponenty $\sqrt[n^2]{a_n} = e^{b_n} \to e^{\ln 2} = 2$.

Sposób 2. (Pomysł pochodzi z prac Julii Filip i Jana Rossy) Niech $c_n = \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2} \to 4$. Określamy $c_1 = 1$. Niech $d_n = c_1 c_2 \dots c_n$, $n \geq 1$. Wtedy $d_n = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ponadto niech $e_n = d_1 d_2 \dots d_{n-1}$. Wtedy $e_n = \frac{a_1^{n-2}}{a_2^{n-1}} a_n$. Jednocześnie $e_n = c_1^n c_2^{n-2} \dots c_n$. Dostajemy $c_1^n c_2^{n-2} \dots c_n = \frac{a_1^{n-2}}{a_2^{n-1}} a_n$. Wyciągając pierwiastek stopnia $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ dostajemy

$$\sqrt[1+2+\ldots+n]{c_1^n c_2^{n-2} \dots c_n} = \frac{a_1^{\frac{2(n-2)}{n(n+1)}}}{a_2^{\frac{2(n-1)}{n(n+1)}}} a_n^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

Rozważamy teraz następujący ciąg f_n:

$$c_1, \sqrt{c_1 c_2}, \sqrt{c_1 c_2}, \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}, \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}, \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}, \dots.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{c_1 \dots c_n} \to 4$ ze znanego faktu o zbieżności średnich geometrycznych, dostajemy, że $f_n \to 4$. Widzimy jednak, że

$$\sqrt[1+2+\ldots+n]{c_1^n c_2^{n-2} \dots c_n} = \sqrt[1+2+\ldots+n]{f_1 f_2 f_3 \dots f_{1+2+\ldots+n}},$$

co jest podciągiem ciągu $g_n = \sqrt[n]{f_1 \dots f_n}$, który jest zbieżny do 4 na mocy faktu o średniej geometrycznej. Dostajemy stąd, że $a_n^{\frac{2}{n(n+1)}} \to 4$, czyli $a_n^{\frac{1}{n(n+1)}} \to 2$. Zatem $\ln b_n = \frac{\ln a_n}{n^2} = \frac{\ln a_n}{n(n+1)} \cdot \frac{n+1}{n} \to \ln 2$, czyli $b_n \to 2$ (korzystamy z ciągłości eksponenty i logarytmu).

Sposób 3. Dla każdego $0 < \varepsilon < 4$ istnieje $n_0(\varepsilon)$ takie, że dla $n \geq n_0$ mamy $4 - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2} \leq 4 + \varepsilon$, czyli $\frac{a_n}{a_{n-1}}(4-\varepsilon) \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}}(4+\varepsilon)$. Wymnażając te nierówności stronami dla $N \geq n \geq n_0$ otrzymamy (iloczyny teleskopowe)

$$(4-\varepsilon)^{N+1-n_0} \frac{a_N}{a_{n_0-1}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_{n_0}} \leq (4+\varepsilon)^{N+1-n_0} \frac{a_N}{a_{n_0-1}}.$$

To można przepisać jako

$$(4-\varepsilon)^{N+1-n_0} \frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \leq (4+\varepsilon)^{N+1-n_0} \frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}}.$$

Wymnażając tę nierówność stronami dla $M - 1 \geq N \geq n_0$ oraz oznaczając $c = \frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}}$, otrzymujemy

$$(4-\varepsilon)^{\sum_{N=n_0}^{M-1}(N+1-n_0)} c^{M-n_0} \leq \frac{a_M}{a_{n_0}} \leq (4+\varepsilon)^{\sum_{N=n_0}^{M-1}(N+1-n_0)} c^{M-n_0}.$$

Zauważmy, że

$$\sum_{N=n_0}^{M-1}(N+1-n_0)=\sum_{k=1}^{M-n_0}k=\frac{1}{2}(M-n_0+1)(M-n_0).$$

Oznaczmy to wyrażenie przez d_M. Zauważmy, że $\frac{d_M}{M^2}\to\frac{1}{2}$ gdy $M\to\infty$. Mnożąc powyższą nierówność przez a_{n_0} i wyciągając pierwiastek stopnia M^2, dostajemy

$$\sqrt[M^2]{a_{n_0}}(4-\varepsilon)^{\frac{d_M}{M^2}}c^{\frac{M-n_0}{M^2}}\ \le\ \sqrt[M^2]{a_M}\le\ \sqrt[M^2]{a_{n_0}}(4+\varepsilon)^{\frac{d_M}{M^2}}c^{\frac{M-n_0}{M^2}}.$$

Biorąc $M\to\infty$ otrzymujemy

$$(4-\varepsilon)^{1/2}\le\liminf_{M\to\infty}\sqrt[M^2]{a_M}\le\limsup_{M\to\infty}\sqrt[M^2]{a_M}\le(4+\varepsilon)^{1/2}.$$

Biorąc teraz $\varepsilon\to 0$ dostajemy

$$2\le\liminf_{M\to\infty}\sqrt[M^2]{a_M}\le\limsup_{M\to\infty}\sqrt[M^2]{a_M}\le 2.$$

Stąd granica górna jest równa granicy dolnej i jest równa 2.

$\square$

1	Napisanie, że jeśli $\frac{c_{n+1}}{c_n}\to g$, to $\sqrt[n]{c}\to g$	1 p.
2	Wykazanie, że $\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\to 4$ (nie dodaje się z punktem 1)	2 p.
3	Nieudane iteracyjne stosowanie $4-\varepsilon\le\frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2}\le 4+\varepsilon$	2 p.
4	Dowód z błędem rachunkowym, w którym gubi się stała 2	7 p.
5	Wypisanie ciągu 2^{n^2}	0 p.